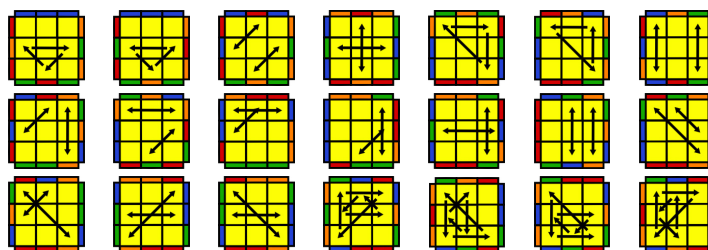


Permutation Parity and Twisty Puzzles Solving (1)

奇偶置换与异形魔方破解（一）

Yujian Song (宋雨键)



这次不介绍具体的魔方破解教程，而是简单介绍一下魔方与置换之间的关系。分析置换的奇偶，在破解异型魔方中十分重要，希望想了解魔方的基本理论或者对破解异形魔方有兴趣的魔友能够对置换有所了解。

所以什么是置换呢？

简单举一个例子，四个数排成 1234 ，我们将 1 和 2 两个数字对换，这四个数的顺序就变成了 2134 ，这就是一个置换。一般来说，把 n 个元素的顺序重新打乱排列，就产生了一个置换。

又例如 123456789 ，我们把它重新排列成 524789136 ，这个重新排列的操作就是置换，数学上可以把置换看成一个函数，例如上面这个置换把 1 映成 5 ，把 6 映成 9 等等。

而如我们一开始提到的两个元素的交换，是很简单的一种置换，我们把它叫做对换。为了理解置换和魔方的关系，我们先拿对换举例。就如 1234 这四个数，如果它们正好是从小到大排列的，不妨称它们是被还原的，而运用对换去操作这 4 个数就好比魔方的转动。

如同对一个打乱了的魔方进行复原，我们把上面那四个数乱排成 4213 后，想要只用所谓的对换还原它们，该怎么做呢？很容易想到，先将 1 和 4 对换一下，变成了 1243 ，这下 1 到了它该到的位置。再看 2 已经归位了。于是接下来把 3 归位， 3 和 4 再对换一下，你看就变成 1234 ，变成复原状态了。

这四个数字的模型和魔方很像，甚至复原它们的过程中还可以看到“层先法”的思想在里面。

有很大一部分的魔方，都可以简单看成一个置换的集合（数学上叫做“群”），例如 wca 官方项目中除 $sq1$ 以外的所有魔方。我们以二阶为例，如果暂时不考虑角块的方向问题的话，简单的把 8 个角块记成 $(UFR, UFL, UBL, UBR, DFR, DFL, DBL, DBR)$ （例如其中 ufr 就代表复原状态下该在 ufr 位置的块），那么所谓的 U 转动，不过是把这 8 个元素做了一个置换，将 $(UFR, UFL, UBL, UBR, DFR, DFL, DBL, DBR)$ 变成了 $(UBR, UFR, UFL, UBL, DFR, DFL, DBL, DBR)$ ，整个魔方的转动都是在对这 8 个元素进行置换罢了。复原这个魔方就相当于用 R, U 等等这些置换把这八个元素的顺序排回原来那样罢了。

（如果要考虑角块的方向的话，只需要将每个角块分解成三个面就行了。把上述 8 个元素拆成 24 个元素，比如把 UFR 拆成 ufr, fru, ruf 三个方向，然后对这 24 个元素做置换就行了。）

置换的奇偶又是什么意思呢？

我们还是来看上面把 4213 换回 1234 的置换，它可以拆解成先 14 对换，再 34 对换。如果我们想要反着来，先把 4 归位，也可以拆成先 34 对换，再 13 对换。或者也可以先 13 对换，再 14 对换。甚至不怕麻烦也可以先 12 对换，再 14 对换，再 24 对换，再 34 对换。

发现了什么吗？无论你怎么拆成对换，这些对换的个数总是偶数。

数学上，可以证明任何一个置换，把它拆成对换，无论怎么拆，拆成对换的个数的奇偶性是不会变的。于是我们把这两类置换分别称为奇置换和偶置换，比如上面的把 4213 换回 1234 的置换就是偶置换。

有了这些东西，我们可以分析一些基本的魔方理论问题了。

一个三阶魔方，肯定不可能出现单独两个棱对换的情况，为什么呢？

我们分析一下三阶的置换，任意一个方向的 90° 转动，可以看成四个角置换和四个棱置换，例如四个角标上号为 1234 的话，一个方向 90° 转动的把它换成了 4123 。它可以拆成先做对换 14 ，再做对换 12 ，最后做对换 23 ——这是个奇置换。

同理对四个棱块的置换也是奇置换，而把这两个奇置换合成在一起（理所当然可以拆成六个对换），就得到了一个偶置换。所以三阶的基本转动都是偶置换，而随便一个打乱的状态，都是由这些基本的置换叠加生成的，它所能拆成的对换数是很多个偶数相加，也是偶数——这个置换也是偶置换。

但两棱对换是个奇置换啊，所以三阶当然怎么转动也转不成两棱对换了。

但是我们另外还能注意到，三阶魔方单考虑棱块的话，是有奇置换的，单考虑角块的话也有。之所以整体不会出现奇置换是因为棱和角叠加在一起抵消掉了。所以三阶还可以出现两个两个棱对换同时两个角对换的情况（没错就是盲拧中万恶的奇偶校验）。

不妨用这种方法分析一下五魔的置换奇偶性，你会发现，五魔不仅没有奇置换，而且也没有奇偶校验。

先写到这里，用置换奇偶性分析魔方的状态是非常有用的，比如 4 阶魔方的 O 特产生原因便可以用奇偶置换分析（甚至还能由此找到解决 O 特的一种方法）；又比如奥斯卡三阶混元魔方复原过程中，可能出现的 P 特需要用分析奇偶的方法解决；又或者 flower copter 的复原中，第一步就需要分析棱的置换奇偶来定出复原坐标.....

感谢您看到这里。