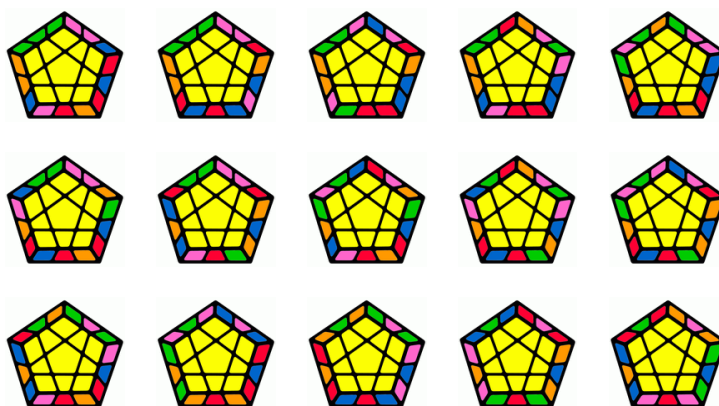


Permutation Parity and Twisty Puzzles Solving (2)

奇偶置换与异形魔方破解（二）

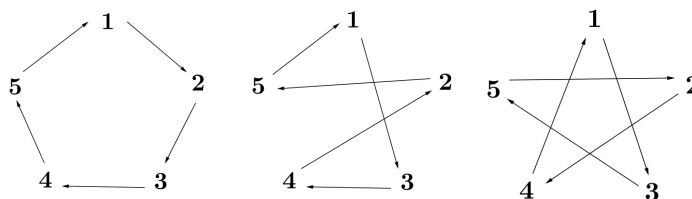
Yujian Song (宋雨键)



接着上次讨论置换和魔方破解的关系。

轮换与对换

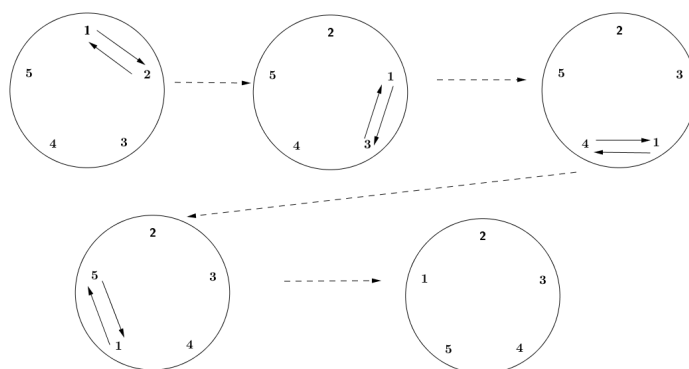
先介绍一下什么是轮换，听这个名字应该能听出来，轮换就是把几个元素轮着换一圈。例如将 1 换成 2, 2 换成 3, 3 换成 4, 4 换成 5, 5 再换回 1，下图这些都是轮换，而这些都是 5 个元素轮换，我们管它叫 5 轮换。



其中 2 轮换就是我们上次讲到的对换。

按照轮换的顺序，可以有一种简单的方法来表示轮换，例如上图中的轮换可以分别表示成 (12345) 、 (13425) 和 (13524) 。

而利用我们上次讲到的置换拆解，不难得到轮换拆成对换的结果，下图以 (12345) 为例：



可以看出轮换 (12345) 可以分解成先 (12) ，再 (13) ，再 (14) ，最后 (15) ，这可以记成 $(12345) = (12)(13)(14)(15)$ ，对于其它的对换亦可以这般分解。

这告诉我们：偶数个元素的轮换是奇置换，奇数个元素的轮换是偶置换。

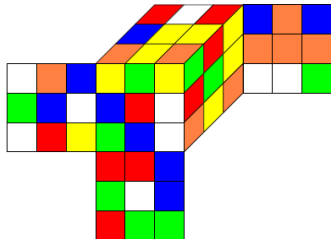
一般置换的分解

一般置换总可以分解成不相交的轮换的合成，例如我们上回用来举例的一个置换：把 123456789 置换成 524789136。

从第一个元素开始，1 替换成了 5，再看 5，5 替换成了 8,8 又替换成了 3，3 替换成了 4,4 替换成 7,7 回到了 1，这样一圈后 9 个元素还没有全部换完，接着看下去：2 替换到它自己，不变。6 替换成 9，9 又回到 6。于是上述置换分解成了 **(158347)(69)**。

到此为止，好像和魔方还没有关系，别急。

我们来看一个三阶魔方，如下图所示：



它的所有棱块由这个状态变成复原状态是一个置换，我们把这个置换拆成轮换，就有**(黄绿 黄红)(蓝橙 绿橙 黄橙 白橙 绿白 黄蓝)(蓝白 红绿 白红 红蓝)**。而又其中的每一个轮换都可以拆成对换的合成，所以，如果我们找到一个方法，来对换三阶魔方的任意两个棱块，那就可以还原所有棱块了。同样的如果我们再找到一个对换任意两个角块的方法，就可以复原整个魔方了。

等等，我们上回证明过三阶不能单独对换两个块。

怎么办呢？不能拆成对换，那就试试拆成偶置换中最简单的一种——3 轮换（或者说三循环），有如下结论：任何一个偶置换都可以拆成一系列三循环的合成，任何一个奇置换都可以拆成一系列三循环加上一个对换的合成。

这很好理解，随便给一个置换，我们先它拆成一系列对换，然后把把这些对换两个两个一组，组合成三循环就行了。这两组对换的关系有两种情况：相交和不相交。对于相交的情况，例如**(12)(13)**，可以直接合成三循环**(123)**，而不交的情况，例如**(12)(34)**，可以这样分解：

$$(12)(34)=(12)(13)(13)(34)=(12)(13)(31)(34)=(123)(314)=(123)(143)。$$

于是就有了上面的结论，作为例子，有**(12345)=(123)(145)**。

如果继续做下去，你还能证明能够让这些三循环全都由一个固定元素开始，这便是盲拧方法的基础，那一个固定的元素就是缓冲块。

而对于破解来说（假设我们不会三阶魔方），我们只需要找到任意的三循环公式就行了，和盲拧不同，我们的奇偶检验可以第一步就调整，比如一开始判断出有奇偶校验，直接做一个 **U** 就行了。

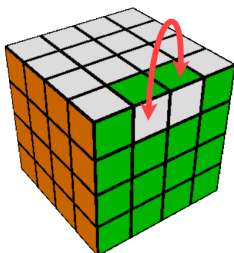
破解那些置换方式明显，非捆绑的异形魔方，核心问题就是找三循环。可以说找到了三循环，就等于破解了魔方。

有些不好找三循环的魔方，也可以找两对换（指不交的两个对换）公式，关于一些基本的三循环或者两对换的找法，以后再说吧。

最后处理一个遗留问题：怎么用置换的奇偶性分析四阶魔方 **○特**。

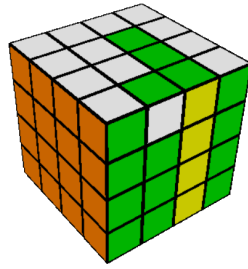
四阶 **○特**

四阶 **○特**是一个典型的奇置换，如图



只需将两个棱对换即可还原四阶，而这个对换是奇置换，四阶的外层转动为四个角块轮换加两组棱块的四轮换，对棱块来说是两个四轮换的合成，为偶置换，所以要产生奇置换需要依靠内层转动。

具体说来，做 $Rw R'$ 即是一个内层的转动，且将四个棱块进行轮换，是个奇置换，做完以后棱块的奇偶便没有问题了。但此时中心被打乱了，需要用不改变棱块奇偶的方法复原中心。这也就是说，内层不能单独转 90° ，转 90° 的总次数必须是偶数。



例如复原图中的绿面中心，就不能使用 Rw' ，而应该使用 $U2 Rw U2 Rw'$ ，其他面中心同样复原，再拼棱，就会发现 O 特没有了。

另一种作法是直接做 $Rw (U2 Rw)^4$ ，再重新拼棱，这种作法也很好理解，做 Rw 之后需要将四对半中心进行轮换，因此借助 U 面上的白色半中心为“缓冲块”，做 $U2$ 就把白色半中心换给了绿色处，再做 $Rw U2$ 把绿色半中心换给了黄色处，然后 $Rw U2$ 把黄色换给蓝色， $Rw U2$ 把蓝色换给白色，最后 Rw 把中心回位，奇偶性也调好了。

这种调奇偶的方法在处理奥斯卡混元三阶的 P 特时也有应用。

感谢您看到这儿。